

Stima & Identificazione

Compito del 25 Giugno 2018, ore 8:30, Aula 207, Santa Marta

Problema 1 - Si consideri il seguente sistema stocastico:

$$\begin{cases} s_t = 2s_{t-2} + 3w_{t-2} \\ y_t = s_t + v_t \\ w_t = wn(0, q) \\ v_t = wn(0, r) \\ w_t \perp v_k \quad \forall k, t \end{cases}$$

- a) Dire, giustificando la risposta, se il segnale y_t è stazionario.
 - b) Determinare il predittore ottimo (MMSE) a guadagno costante ad un passo di y_t verificando che il corrispondente MSE $\alpha = E[\tilde{s}_{t|t-1}^2] > 0$ soddisfa l'equazione $\alpha^2 - (3r + 9q)\alpha - 9qr = 0$.
 - c) Posto $q = 1$ determinare $r > 0$ tale che $\alpha = E[\tilde{s}_{t|t-1}^2] = 6 + 3\sqrt{5}$.
 - d) Determinare la stima ottima $\hat{s}_{t|t}$ di s_t ed il relativo MSE $\alpha' = E[\tilde{s}_{t|t}^2]$, dicendo di quanto si riduce l'MSE α' rispetto all'MSE di predizione α per effetto dell'osservazione di y_t .
- (**Suggerimento:** si usi una rappresentazione di stato del sistema in forma canonica di osservabilità.)

Problema 2 - Si consideri il sistema stocastico

$$\begin{cases} s_t = \frac{4}{5}s_{t-1} + w_t \\ y_t = s_t + v_t \\ w_t = wn(0, \frac{7}{75}) \\ v_t = wn(0, 1) \\ w_t \perp v_k \quad \forall k, t \end{cases}$$

- a) Dire, giustificando la risposta, se il segnale y_t è stazionario.
- b) Determinare modello ARMA e modello alle innovazioni del segnale y_t .
- c) Determinare funzione di auto-covarianza di y_t .
- d) Determinare spettro e densità spettrale di y_t .
- e) Determinare predittori ottimi a $T = 1, 2, 3$ passi di y_t e relativi guadagni di predizione $\eta_T \triangleq E[\tilde{y}_{t|t-T}^2] / E[y_t^2]$.

Problema 3 - Si considerino le osservazioni

$$\begin{aligned} Y_i &= X + V_i \quad i = 1, 2, \dots, p \\ V_i &\perp V_j \quad i \neq j \\ V_i &\sim (0, \sigma_i^2) \end{aligned}$$

della grandezza scalare $X \sim (\bar{x}, \sigma_X^2)$.

- (a) Determinare la stima BLUE di X basata su tali osservazioni.

(b) Assumendo errori di misura Gaussiani di deviazione standard $\sigma_i = 0.2$ e assenza di informazione a-priori, si determinino stime BLUE e MMSE di X basate sulle osservazioni

$$y_1 = 1, y_2 = \frac{4}{5}, y_3 = \frac{7}{10}, y_4 = \frac{9}{10}, y_5 = \frac{6}{5}$$

ed i corrispondenti valori di MSE.

(c) Assumendo errori di misura uniformemente distribuiti nell'intervallo $[-0.6, 0.6]$ e assenza di informazione a-priori, si determinino stime BLUE e MMSE di X basate sulle osservazioni di cui al punto precedente ed i corrispondenti valori di MSE.

Problema 4 - Si consideri la stima della grandezza scalare X sulla base dell'osservazione scalare:

$$\begin{cases} Y = X^3 + V \\ X \perp V \\ V \sim (0, 1) \\ X \sim (0, 10) \end{cases}$$

Osservando $Y = y = 8$:

(a) determinare un'approssimazione della stima BLUE e della relativa covarianza con il metodo della trasformata unscented;

(b) determinare un'approssimazione della stima BLUE e della relativa covarianza mediante linearizzazione del modello di osservazione nell'intorno di \bar{x} .

(Suggerimento: Per la trasformata UT si utilizzino i parametri $\kappa = 0, \alpha = 1, \beta = 2$.)

Problema 5 - Si spieghi mediante uno pseudo-codice come si può applicare il filtro di Kalman esteso ad un sistema

$$\begin{cases} x_{t+1} = f_t(x_t, w_t) \\ y_t = h_t(x_t, v_t) \end{cases}$$

con disturbo di processo e rumore di misura non additivi.